Лекция 10
Понятие функционального ряда. Степенные ряды и их свойства. Теорема Абеля.

Тлеулесова Айгерим Мекемтасовна

Цель лекции

- Сформировать у студентов представление о функциональных и степенных рядах, их областях сходимости, свойствах, а также понимание применения теоремы Абеля.

Основные вопросы:

- Понятие функционального ряда.
- Равномерная и поточечная сходимость функциональных рядов.
- Степенные ряды: определение и примеры.
- Радиус и интервал сходимости степенного ряда.
- Свойства степенных рядов: дифференцирование и интегрирование по членам.
- Теорема Абеля о поведении степенных рядов на границе интервала сходимости.

Ряд, членами которого являются функции от x, называется функциональным:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) \qquad (1)$$

Придавая x определенное значение x_0 , мы получим числовой ряд

$$u_1(x_0) + u_2(x_0) + \cdots + u_n(x_0) + \cdots$$

степенной ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \ldots + a_n x^n + \qquad (2)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 \ldots + a_n (x - x_0)^n + \cdots \qquad (3)$$

Теорема 1. (Абель). Если степенной ряд (2) сходится при $x = x_0 \neq 0$, то он абсолютно сходится при всех значениях x , удовлетворяющих неравенству $|x| < |x_0|$

Следствие 1. Если степенной ряд (2) расходится $x = x1$, то он расходится и при всех x, удовлетворяющих неравенству $|x| > |x_1|$

Определение. Интервал $(-|x_0| ; |x_0|)$ и называется интервалом сходимостистепенного ряда.

Радиус сходимости степенного ряда (2) определяется следующим образом (исходя из признака Даламбера):

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \qquad (4)$$

Аналогично, воспользовавшись радикальным признаком Коши, можно установить, что

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \qquad (5)$$

Свойства степенных рядов.

1. Сумма S(x) степенного ряда (2) является непрерывной функцией в интервале сходимости (- R; R).
2. Степенные ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$ имеющие радиусы сходимости соответственно R1 и R2 , можно почленно складывать, вычитать и умножать. Радиус сходимости произведения, суммы и разности рядов не меньше, чем меньшее из чисел R1 и R2
3. Степенной ряд внутри интервала сходимости можно почленно дифференцировать
4. Степенной ряд можно почленно интегрировать на каждом отрезке, расположенном внутри интервала сходимости; при этом для ряда (2) при $-R < a < x < R$ выполняется равенство $\int_a^x S(t)\,dt = \int_a^x a_0\,dt + \int_a^x a_1 t\,dt + \int_a^x a_2 t^2\,dt + \cdots + \int_a^x a_n t^n\,dt + \cdots$

Пример 1. . Найти область сходимости ряда : $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n^n x^n$

$a_n = (-1)^{n-1} n^n$; $|a_n| = n^n$ $|a_{n+1}| = (n+1)^{n+1}$ =>

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \cdot \frac{1}{n+1} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n \cdot \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} == \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{(n+1)\cdot\frac{n}{n+1}} \cdot 0 = e \cdot 0 = 0$$

Ряд сходится в одной точке $x = 0$

Пример 2

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n}{2n} x^{2n} \sin(3x - \pi n)$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{9^{n+1} x^{2n+2} \sin(3x - \pi n - \pi) 2n}{2(n+1) 9^n x^{2n} \sin(3x - \pi n)}\right| = \left|9x^2\right| < 1$$

$$x^2 < \frac{1}{9} \Rightarrow |x| < \frac{1}{3} \Rightarrow -\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3}$$

Контрольные вопросы

- Что называется функциональным рядом?
- В чём отличие равномерной сходимости от поточечной?
- Дайте определение степенного ряда.
- Как определяется радиус сходимости степенного ряда?
- Какие операции допускаются над степенными рядами внутри интервала сходимости?
- Сформулируйте теорему Абеля.

Рекомендуемая литература:

1. Қасымов Қ., Қасымов Ә. Жоғары математика курсы. Алматы, Санат, 1994

2. Дүйсек А.К., Қасымбеков С.Қ. Жоғары математика. Алматы, ҚБТУ, 2004

3. Айдос Е.Ж. Жоғары математика (қысқаша курс). Алматы, Иль-Тех-Кітап, 2003

4. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики – М.: «Наука». – 1989. – 656 с.

5. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа, ч.1, М: «Наука». – 1982.

6. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия М: «Наука». – 1991.